

Neutroneninduzierte Neutronen in U-235 und U-238

von
David Rothmaier
geboren am
01. August 1991

Bachelorarbeit im Studiengang Physik
Universität Hamburg

2015

1. Gutachter: Prof. Dr. Gerald Kirchner
2. Gutachter: Prof. Dr. Götz Neuneck

Erklärung gemäß der Bachelorprüfungsordnung

Hiermit bestätige ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbständig verfasst wurde und ich keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel - insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen - benutzt habe und die Arbeit von mir vorher nicht einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht wurde. Die eingereichte schriftliche Fassung entspricht der auf dem elektronischen Speichermedium. Ich bin damit einverstanden, dass die Bachelorarbeit veröffentlicht wird.

David Rothmaier

Hamburg, den 29. November 2015

Kurzzusammenfassung

Diese Bachelorarbeit untersucht eine nukleare Messtechnik mit Neutronen in Hinblick auf eine mögliche Verwendung bei der Echtheitsüberprüfung von uranbasierten nuklearen Sprengköpfen. Das Ziel der systematischen Untersuchung ist es, herauszufinden, wie exakt der Nachweis von Uran, in diesem Fall U-235 und U-238, mittels neutroneninduzierter Neutronen funktioniert.

Anhand der untersuchten Methode wird versucht, mithilfe von Neutronenquellen bei zwei unterschiedlichen Energien durch die Messung der Zählraten die Masse und den Anreicherungsgrad einer Uranprobe zu bestimmen. Hierbei wird die Spaltschwelle von U-238 ausgenutzt. Ein entsprechendes Experiment wird simuliert und die Ergebnisse in Hinblick auf Möglichkeiten und eventuelle Einschränkungen ausgewertet. Im ersten Schritt werden für die Simulation der Zählraten die Energie und die Neutronenflussdichte zweier unterschiedlicher Neutronenquellen sowie die Detektoreffizienz eines He-3-Detektors simuliert und es werden die relevanten Wirkungsquerschnitte der ENDF/B-VII.1-Datenbank entnommen. Im zweiten Schritt werden aus den Ergebnissen die Masse und der Anreicherungsgrad berechnet und systematisch untersucht. In der anschließenden Diskussion stellt sich heraus, dass die Unsicherheiten der Messtechnik in der Berechnung der Masse und des Anreicherungsgrads annehmbar sind. Zuletzt wird noch ein Ausblick für weiterführende Untersuchungen gegeben.

Abstract

This bachelor thesis examines a measurement technique regarding application possibilities for the authentication of uranium based warheads. It is the purpose of this scientific examination to assess the prospects of uranium detection, in this case of U-235 and U-238, with neutron induced neutrons.

The proposed measurement technique provides a possibility for the determination of the fissile mass and the enrichment of uranium through neutron measurements with neutron sources at two different energies. At this point the fission energy threshold of U-238 is used as an advantage. Hence an appropriate experiment is simulated and its

results are assessed regarding possibilities and limitations. Firstly, in order to simulate the count rates, the energy and the neutron flux density of two different neutron sources as well as the detector efficiency of a He-3 detector are simulated and the relevant fission cross-sections are taken from the ENDF/B-VII.1-database. Secondly, fissile mass and enrichment are calculated from the results of the count rate measurements and systematically evaluated. The following discussion leads to the conclusion that the uncertainties of the measurement technique in the determination of fissile mass and enrichment are considered rather low. Lastly a proposal is made for further research on this topic.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung	Seite 9
2.	Theoretische Voraussetzungen	Seite 11
2.1	Neutroneninduzierte Neutronen	Seite 11
2.2	Wirkungsquerschnitte	Seite 11
2.3	Mittlere Zahl an Spaltneutronen pro Spaltung $\bar{\nu}$	Seite 13
2.4	He-3-Detektor	Seite 13
2.5	Zählraten	Seite 14
3.	Methode und Simulation	Seite 16
4.	Annahmen	Seite 17
4.1	Neutronenquellen	Seite 18
4.2	Detektoreffizienz	Seite 18
4.3	Wirkungsquerschnitte	Seite 19
4.4	Mittlere Zahl an Spaltneutronen pro Spaltung $\bar{\nu}$	Seite 20
5.	Messung und Analyse der Zählraten	Seite 21
5.1	Zählraten	Seite 21
5.2	Rückrechnung auf Masse und Anreicherungsgrad	Seite 22
6.	Ergebnisse	Seite 24
7.	Diskussion und Ausblick	Seite 29
	Literaturverzeichnis	Seite 32
	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	Seite 34
	Anhang	Seite 35

1. Einführung

Fortschritte in der Abrüstung nuklearer Sprengköpfe hängen stark von der Entwicklung funktionierender technischer Methoden zur Verifikation ab. In den vergangenen Jahren hat es immer wieder Abrüstungsverträge gegeben (z.B. New START), welche sich bisher aber lediglich auf die Verifikation von Trägersystemen beschränken und keinen Fokus auf die Sprengkopfzerlegung gelegt haben [1]. Für das Erreichen eines „Global Zero“ [2] oder der „vollständigen Abrüstung unter [...] internationaler Kontrolle“ [3], zu der sich die Atomwaffenstaaten in Artikel VI des Atomwaffensperrvertrags (NVV) verpflichtet haben, könnte die Verifikation von Sprengkopfzerlegung aber wichtig werden, damit auch weiterhin das Vertrauen in einen fortschreitenden Abrüstungsprozess gestärkt werden kann.

Der erste Schritt zur Verifikation der Sprengkopfzerlegung ist, das als nuklearen Sprengkopf deklarierte Objekt tatsächlich als solches zu identifizieren. Obwohl bereits einige Messtechniken hierfür existieren, gibt es andere Vorschläge und Methoden, die noch ausprobiert und hinsichtlich ihrer Praktikabilität überprüft werden sollten [4]. Denn jedes mögliche Abrüstungsabkommen würde die Verifikation in dem Grade vor gewisse technische Herausforderungen stellen, in dem zwischen der Notwendigkeit wirksamer Verifikation und der Verpflichtung zum Schutz sensibler Informationen bezüglich des Designs von Atomwaffen Balance gehalten werden muss. Denn beides sind vertraglich verpflichtende Bestandteile des NVV, ausgedrückt in Artikel I, II und VI [3]. Eine Idee ist daher, nukleare Messungen hinter einer Informationsbarriere durchzuführen, um keine sensiblen Informationen preiszugeben, sondern lediglich ein Signal zu erhalten, das anzeigt, ob es sich um einen nuklearen Sprengkopf handelt oder nicht. Eine solche Informationsbarriere genannte Apparatur würde nur diejenigen Informationen über die nukleare Messung anzeigen, welche zur Verifikation des deklarierten Objekts absolut notwendig sind. Diese Informationen werden Attribute genannt und können unterschiedliche Eigenschaften bezeichnen, wie z. B. das Vorhandensein von Spaltmaterial oder ob die Masse oder der Anreicherungsgrad des Spaltmaterials einen vorher festgelegten Schwellenwert überschreitet, oberhalb dessen man das deklarierte Objekt als nuklearen Sprengkopf identifizieren würde. Man spricht deswegen auch von Attributmessungen [5]. Die Methode der Attributmessungen

befindet sich in Hinblick auf nukleare Messtechniken gerade bezüglich Urans im Fokus intensiver Forschung [4].

Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit Neutronenmessungen zur Echtheitsüberprüfung von uranbasierten nuklearen Sprengköpfen, d. h. mit einer bestimmten Methode zum Nachweis von Uran mittels neutroneninduzierter Neutronen in Uran-235 und Uran-238. Ein Experiment, das die Messung solcher Neutronen beinhaltet, soll für diese Arbeit simuliert und die Ergebnisse in Hinblick auf den Urannachweis und damit auf die Methode der Attributmessung ausgewertet werden.

2. Theoretische Voraussetzungen

2.1 Neutroneninduzierte Neutronen

Setzt man eine sich in Ruhe befindende Uranprobe einem Neutronenstrahl aus, so gibt es einige mögliche kernphysikalische Reaktionen zwischen den einzelnen Neutronen und den Uranatomen in der Probe. Die hier ausschließlich betrachtete Reaktion beschreibt die induzierte Spaltung der Uranatome durch ein einfallendes Neutron unter Emission von Spaltneutronen und wird oft (n,f) Reaktion genannt. Dabei fängt das Uranatom zunächst das einfallende Neutron ein, woraufhin der Kern instabil wird und zerfällt. Dabei emittiert er schnelle Neutronen, sogenannte Spaltneutronen [6]. Andere mögliche Reaktionen, wie etwa (n, γ) Reaktionen, bei denen es nicht zu einer Spaltung kommt, werden jedoch von der Betrachtung ausgenommen. Auch bleiben mögliche Reaktionen von Spaltneutronen noch innerhalb der Uranprobe, welche zur Folge haben könnten, dass nicht alle Spaltneutronen am Detektor ankommen, unberücksichtigt.

Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Spaltung und die Anzahl der emittierten Spaltneutronen sind abhängig von der Energie der Neutronen aus der Neutronenquelle und spezifisch für jedes Isotop. Dieses soll im Folgenden näher erläutert werden.

2.2 Wirkungsquerschnitte

Der Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion in der Physik der Kerne und der Teilchen. Dieser kann stark abweichen vom geometrischen Wirkungsquerschnitt, hat aber auch eine Flächeneinheit, das Barn ($1b = 10^{-28}m^2$). Im hier betrachteten Fall einer (n,f) Reaktion steht der Wirkungsquerschnitt für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron, das auf ein Atom der Uranprobe trifft, eine Spaltung induziert. Er ist abhängig von der Neutronenenergie und im Allgemeinen für thermische Neutronen besonders groß.

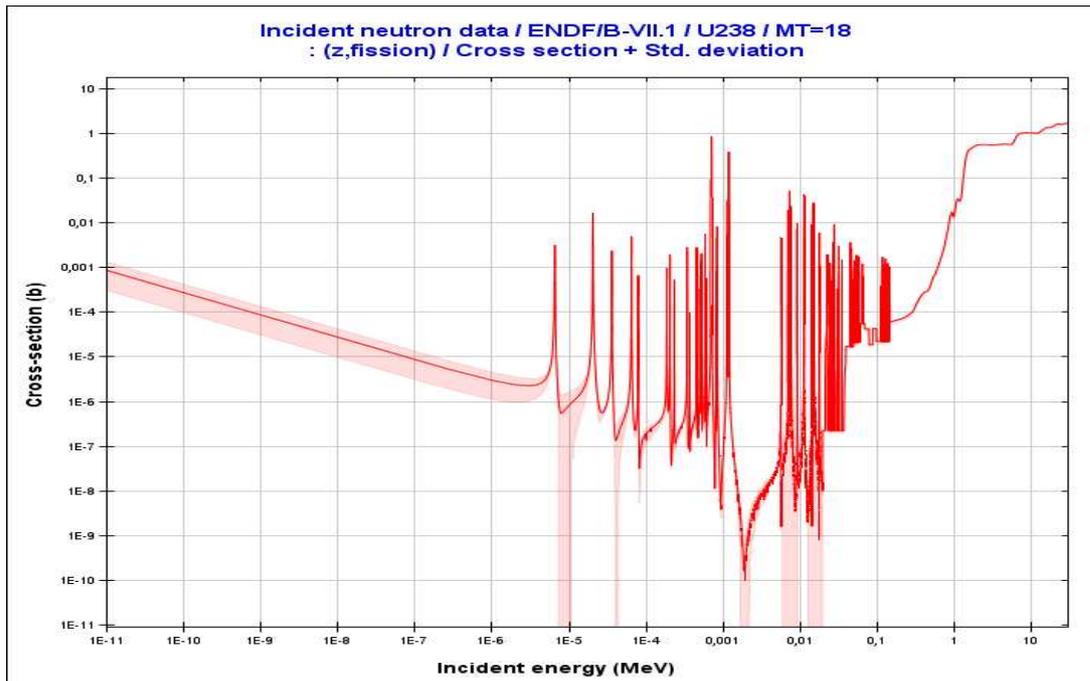


Abb. 1: Wirkungsquerschnitt (in barn) von U-238 für (n,f) Reaktionen in Abhängigkeit der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV) [7].

Anhand der Abbildung 1 kann der Verlauf des Wirkungsquerschnitts qualitativ gut nachvollzogen werden. Für langsame und thermische Neutronen verhält er sich umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit der Neutronen [8]. Auf diesen Verlauf folgt ein Resonanzbereich. Im Falle des (n,f) Wirkungsquerschnitts von U-238 setzt dieser Bereich ca. bei 10eV ein und endet etwa bei 100keV. Dahinter wird der Verlauf wieder klarer und sinkt meist weiter mit Zunahme der Energie – nicht aber im Falle von U-238. Dieses Isotop weist eine Besonderheit auf. Anstatt wieder weiter zu sinken, wächst der Wirkungsquerschnitt ab einer Neutronenenergie von ca. 1MeV sehr schnell auf einen hohen Wert an, um einige Größenordnungen höher als es für thermische Neutronen der Fall war. Man spricht daher auch von einer Spaltschwelle bei U-238 und davon, dass dieses Isotop erst ab einer bestimmten Neutronenenergie gespalten wird. Diese Eigenschaft wird im weiteren Verlauf der Arbeit von großer Bedeutung sein.

Da bereits von langsamen, bzw. thermischen Neutronen die Rede war, soll hier die Bedeutung von thermischen und schnellen Neutronen kurz skizziert werden. Anhand ihrer Energie teilt man Neutronen in mehrere Gruppen auf. Diese Aufteilung reicht von ultrakalten bis hin zu schnellen Spaltneutronen. Energetisch gesehen liegen thermische Neutronen mit ca. $10^{-2}eV$ also über den kalten Neutronen und zählen

damit zu den langsamen Neutronen. Von schnellen Neutronen ist dann ab den Energien von 1MeV die Rede. Dazu gehören auch Spaltneutronen, die in dieser Arbeit eine große Rolle spielen [9].

2.3 Mittlere Zahl an Spaltneutronen pro Spaltung $\bar{\nu}$

Bei der Spaltung von Uran werden Neutronen freigesetzt. Für gewöhnlich entsteht aber nicht nur ein Neutron pro Spaltung. Die Anzahl der emittierten Neutronen folgt einer Verteilung und wird auch Neutronenmultiplizität genannt [10]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde jedoch lediglich auf die mittlere Anzahl an Spaltneutronen zurück gegriffen und die Verteilung der Neutronenmultiplizität vernachlässigt. Diese mittlere Anzahl – sie wird im Folgenden mit $\bar{\nu}$ bezeichnet - hängt im Allgemeinen von der Energie der einfallenden Neutronen ab und beträgt ca. 2,5 Neutronen pro Spaltung, wobei sie für U-235 leicht niedriger ist als für U-238. Erst für sehr schnelle Neutronen ab ca. 1MeV steigt diese Anzahl stark an.

2.4 He-3-Detektor

In dieser Arbeit wird ein He-3-Detektor simuliert, der in einer 4π -Geometrie um die Probe herum angeordnet ist, welche sich im Zentrum dieser Geometrie befindet und aus der die Spaltneutronen austreten. Es wird dabei eine punktförmige Quelle angenommen. Diese Anordnung soll sicherstellen, dass keine Spaltneutronen den Detektor verfehlen können. Dabei besteht der Detektor aus einem Thermalisator, z. B. aus Polyethylen, der die Spaltneutronen so moderiert, dass die Energieabhängigkeit der Effizienz ϵ vernachlässigt werden kann. Umgeben von diesem Thermalisator befinden sich die He-3-Zählrohre, in welche die thermalisierten Spaltneutronen eintreten und dann in einer Reaktion mit He-3 in ein Proton und ein Tritiumatom umgewandelt werden. Dieses Proton wird vom Detektor registriert. Dabei wird die Eigenschaft des Protons als geladenes Teilchen genutzt. Dieses geladene Teilchen kann andere Atome im Detektor ionisieren, sodass man durch Anlegen einer Spannung an den Detektorenden ein elektrisches Signal erhält [10].

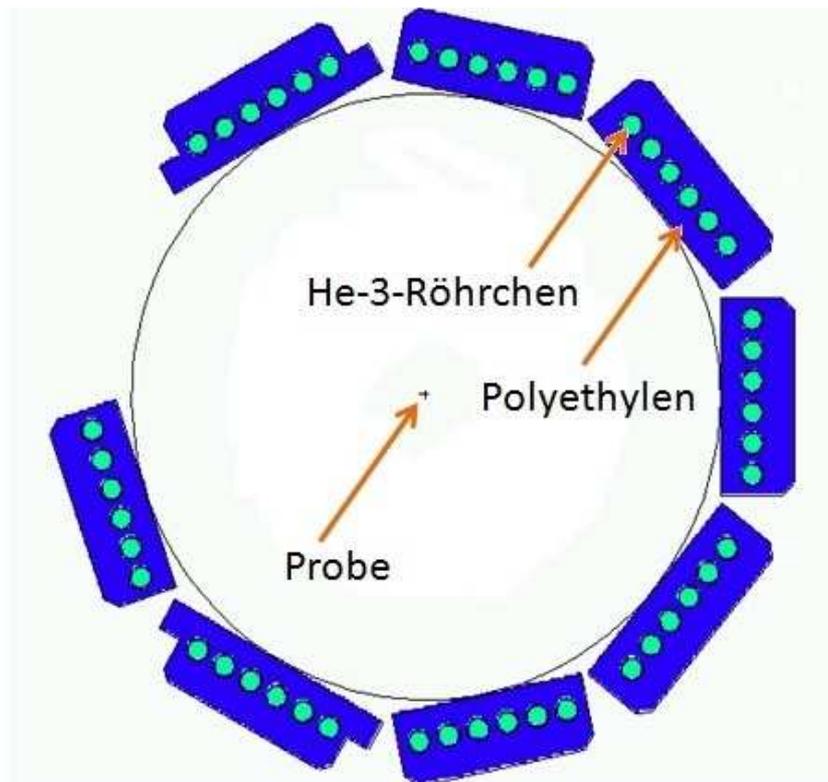


Abb. 2: Schematische Darstellung der Anordnung eines He-3-Detektors um die punktförmige Quelle. Durch diese 4π -Geometrie der Anordnung soll sichergestellt werden, dass keine Spaltneutronen den Detektor verfehlen können [11].

Die Effizienz ε zeigt das Verhältnis zwischen allen aus der Probe emittierten Spaltneutronen und denjenigen, die der Detektor registriert. Sie hängt von der Energie der Spaltneutronen ab und nicht von den aus der Neutronenquelle stammenden Neutronen. Wie hoch die Detektoreffizienz letztendlich ist, hängt von dem verwendeten Detektortyp ab, sodass man sich im Fall eines Realexperiments notwendigerweise Gedanken über den verwendeten Detektor machen und über dessen Eigenschaften spezifische Aussagen treffen muss.

2.5 Zählraten

Die Reaktionsrate beschreibt die Anzahl an Reaktionen eines bestimmten Typs pro Sekunde. Im Folgenden werden (n,f) Reaktionen in einer Uranprobe betrachtet, welche dem Beschuss durch einen Neutronenstrahl ausgesetzt wird. Die Reaktionsrate R beschreibt demnach, wie viele Spaltungen pro Sekunde durch die Neutronen in der Uranprobe induziert werden. Sie wird beschrieben durch

$$R = N_{AX} \int \Phi(E) \sigma(E) dE$$

und hängt ab von der Neutronenflussdichte $\Phi(E)$, vom (n,f) Wirkungsquerschnitt und der Anzahl an Targetatomen N_{AX} [8]. Obige Formel setzt allerdings den Fall einer idealisierten Uranprobe voraus, welche homogen und sehr dünn ist. Wegen dieser Vereinfachung wird die untersuchte Probe im Folgenden als punktförmig angesehen. Des Weiteren muss im Allgemeinen über das gesamte Energiespektrum der Neutronen integriert werden. In dieser Arbeit werden aber ausschließlich Neutronen einer bestimmten Energie angenommen, sodass sowohl die thermischen als auch die schnellen Neutronen jeweils dieselbe Energie besitzen. So kann obiger Ausdruck für R vereinfacht werden.

Die Zählrate ZR_{th} bezeichnet die Anzahl an Spaltneutronen, die ein Detektor pro Sekunde registriert. Um rechnerisch von der Reaktionsrate zur Zählrate zu gelangen, muss zusätzlich berücksichtigt werden, wie groß $\bar{\nu}$ und die Detektoreffizienz ε sind. Die Formel für die Zählrate sieht dann folgendermaßen aus:

$$ZR = N_{AX} \varepsilon(E_n) \int \bar{\nu}(E) \Phi(E) \sigma(E) dE$$

Wie zuvor ist auch hier im Allgemeinen über das gesamte Energiespektrum der Quellneutronen zu integrieren. Die Formel wird jedoch ebenfalls durch die Annahme monoenergetischer Neutronen vereinfacht. $\varepsilon(E_n)$ signalisiert an dieser Stelle noch einmal, dass die Detektoreffizienz von der Energie der Spaltneutronen abhängt, die sich von der Energie der Quellneutronen unterscheidet.

3. Methode und Simulation

In diesem Kapitel wird eine bestimmte Methode zum Nachweis von Uran im Rahmen der Abrüstungsverifikation von uranbasierten Atomwaffen, d. h. zur Bestimmung der Masse und des Anreicherungsgrades des Spaltmaterials vorgestellt. Hierfür wird ein Experiment simuliert, um vorab die Realisierbarkeit, die Genauigkeit und damit die Erfolgsaussichten der vorgeschlagenen Methode zu untersuchen.

Im Experiment wird angenommen, dass eine Uran-Probe unbekannter Masse m und unbekanntem Anreicherungsgrades a vorliegt. Der Einfachheit halber wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass sich lediglich zwei verschiedene Uranisotope in der Probe befinden: U-235 und U-238. Vermittels der angewendeten Methode wird versucht, mithilfe von Neutronenquellen bei zwei unterschiedlichen Energien durch die Messung der Zählraten beide unbekanntem Größen zu bestimmen [4]. Hierbei soll die Spaltschwelle von Uran-238 ausgenutzt werden, welches erst ab einer bestimmten Neutronenenergie gespalten wird und dabei Spaltneutronen emittiert.

In dem vorliegenden Fall bezeichnen die Zählraten ZR_{th} und ZR_f die Anzahl der Spaltneutronen, die der verwendete Detektor pro Sekunde misst. Die Zählraten ergeben sich aus der Anzahl N der durch Neutronen induzierten Neutronen pro Sekunde multipliziert mit der Detektoreffizienz ε , also dem prozentualen Anteil derjenigen Spaltneutronen, die der Detektor tatsächlich zählt. Es gilt also:

$$ZR_i = N_i \varepsilon.$$

Hierbei gibt der Index i an, ob es sich bei der Neutronenquelle um thermische Neutronen (ZR_{th}) oder schnelle Neutronen (ZR_f) gehandelt hat. Geht man einen Schritt zurück, dann ist N das Produkt aus der Reaktionsrate R , also der Anzahl aller neutroneninduzierten Spaltungen pro Sekunde, und der Zahl $\bar{\nu}$, die der durchschnittlichen Anzahl an freigesetzten Neutronen pro Spaltung entspricht. Das bedeutet:

$$N = R \bar{\nu}.$$

Die Reaktionsrate R ergibt sich aus dem Wirkungsquerschnitt σ und der Neutronenflussdichte Φ der Neutronenquelle und aus der Anzahl an Targetatomen N_{AX} . Bei einer festen Energie bedeutet dies für die Reaktionsrate:

$$R = N_{AX} \Phi \sigma.$$

Die gesuchten Größen befinden sich zusammengefasst in der Zahl N_{AX} , also die Masse m und der Anreicherungsgrad a der Uranprobe. Der Zusammenhang lautet folgendermaßen:

$$N_{AX} = \frac{m a}{A u}.$$

Hier bezeichnet u die atomare Masseneinheit und A die Massenzahl des jeweiligen Uranisotops. An dieser Stelle soll betont werden, dass mit Anreicherungsgrad in dieser Arbeit immer das Masseverhältnis der beiden Uranisotope gemeint ist und nie das Atomverhältnis. So ist es aufgrund dieses direkten Zusammenhangs zwischen den Zahlen N_{AX} und den Zählraten ZR_i naheliegend, dass aus dem Vergleich der beiden gemessenen Zählraten ein Rückschluss auf die Masse und den Anreicherungsgrad gezogen werden kann.

4. Annahmen

Mithilfe des Programms *Wolfram Mathematica (Version 9.0)*, im Folgenden als *Mathematica* bezeichnet, wurde dieses Experiment simuliert und im Anschluss dessen Ergebnisse in Hinblick auf die in der Einleitung dargestellten Fragestellungen ausgewertet.

Im ersten Schritt muss hierfür das Ergebnis der Messung, also die Zählrate, unter Berücksichtigung aller relevanten und oben beschriebenen Größen simuliert werden. Gemäß des Zusammenhangs

$$ZR = N_{AX} \varepsilon(E_n) \int \bar{v}(E) \Phi(E) \sigma(E) dE$$

müssen zuvor Angaben über den verwendeten Detektor und verwendete Neutronenquellen in Hinblick auf die Detektoreffizienz, beziehungsweise die

Neutronenflussdichten gemacht werden. Gleiches gilt für entsprechende Werte für \bar{v} und die Wirkungsquerschnitte beider Uranisotope für die neutroneninduzierte Spaltung. Die Werte für die Masse und den Anreicherungsgrad, welche in der Simulation der Zählraten bekannt sind, werden dabei variabel und möglichst breit gehalten.

4.1 Neutronenquellen

Als Neutronenquellen wurden zwei Quellen verwendet, die sich in der Energie, welche die produzierten Neutronen besitzen, unterscheiden, wobei eine schnelle Neutronen und die andere thermische Neutronen produziert. In dieser Simulation wurde zur Erzeugung thermischer Neutronen der Forschungsreaktor FRM-II gewählt und zur Erzeugung schneller Neutronen ein Deuterium-Deuterium-Generator, der Neutronen produziert, die energetisch hoch genug sind, um die Spaltschwelle von U-238 deutlich zu überschreiten. Die Quellen und ihre Eigenschaften, welche in *Mathematica* simuliert werden, sind in Tabelle 1 zu sehen.

Quelle	Neutronenflussdichte	Neutronenenergie	relativer Fehler
FRM-II (th. N.)	$2,7 \times 10^{10} \frac{1}{\text{cm}^2\text{s}}$	0,025 eV	1%
DD ENG	$2 \times 10^6 \frac{1}{\text{cm}^2\text{s}}$	2,5 MeV	1%

Tab. 1: Neutronenflussdichte, Neutronenenergie und relativer Fehler des FRM-II-Forschungsreaktors und eines DD-Generators (DD ENG) [12].

Hierbei wird mit der Flussdichte immer die Flussdichte am Ort der Probe bezeichnet. Die relativen Fehler der Flussdichten wurden hier willkürlich auf 1% festgelegt [12].

4.2 Detektoreffizienz

Um von der reinen Anzahl an Reaktionen oder der reinen Ausbeute an Spaltneutronen auf eine Zählrate zu kommen, muss die Detektoreffizienz ϵ berücksichtigt werden, mit der ein Detektor die freigesetzten Spaltneutronen zählt.

Die Effizienz ε repräsentiert damit das Verhältnis zwischen allen aus der Probe emittierten Spaltneutronen und denjenigen, die der Detektor registriert. Sie hängt von der Energie der Spaltneutronen ab und nicht von den aus der Neutronenquelle stammenden Neutronen.

In dieser Simulation wurde ein He-3-Detektor verwendet, der in einer 4π -Geometrie um die Probe herum angeordnet ist, welche sich im Zentrum dieser Geometrie befindet und aus der die Spaltneutronen austreten. Es wird dabei davon ausgegangen, dass die Quelle punktförmig ist. Die Effizienz wurde im Folgenden mit 50% angenommen und ihr Fehler auf 5% abgeschätzt [11].

4.3 Wirkungsquerschnitte

Die Wirkungsquerschnitte für die neutroneninduzierte Spaltung für Uran-235 und Uran-238 wurden der ENDF-Datenbank (Version B-VII.1) inklusive Standardabweichungen entnommen [7]. Die diskreten Werte aus der Datenbank wurden zunächst durch Approximation an eine Treppenfunktion für beide Isotope in ein Kontinuum überführt. In Abbildung 3 sind die Wirkungsquerschnitte beider Uranisotope in Abhängigkeit der Neutronenenergie graphisch dargestellt, sodass die Spaltschwelle von Uran-238 bei einer Energie von ca. 1 MeV zu sehen ist.

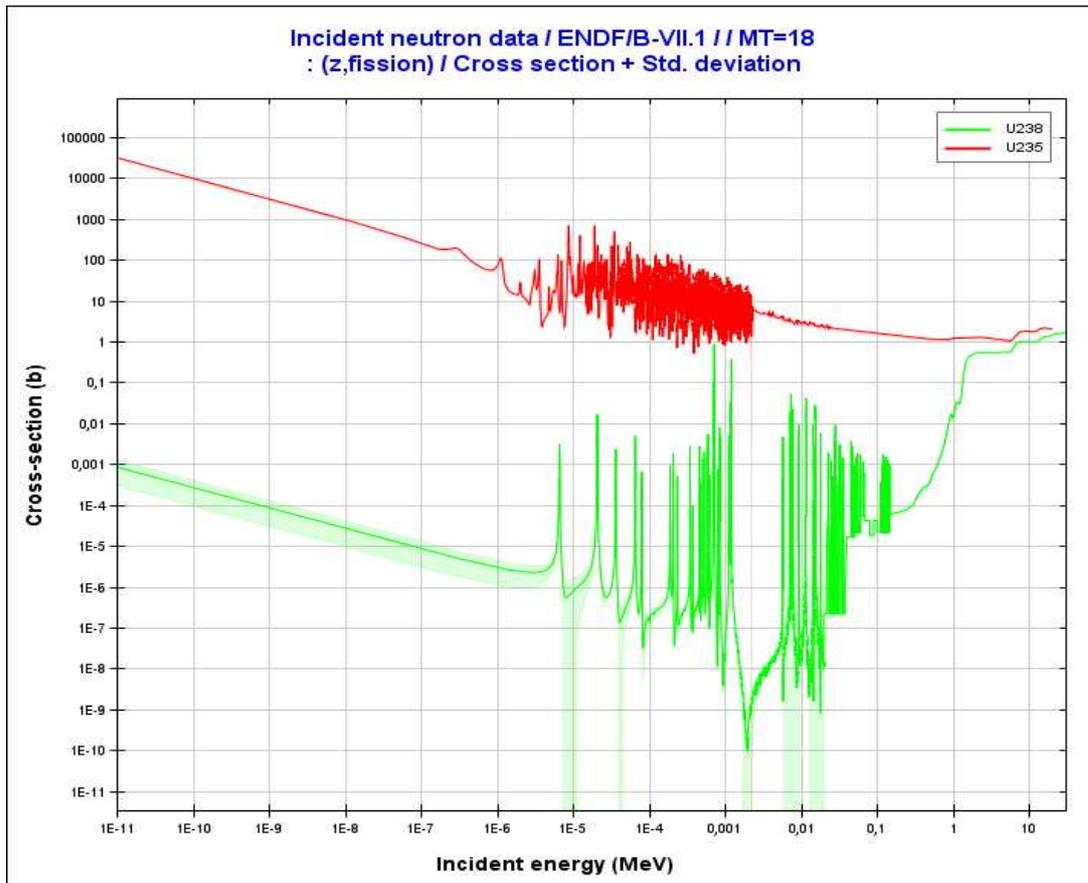


Abb. 3: Wirkungsquerschnitt (in barn) von U-235 und U-238 für (n,f) Reaktionen in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV). Schattierte Bereiche zeigen die Unsicherheiten. Beide Achsen sind logarithmisch dargestellt [7].

4.4 Mittlere Zahl an Spaltneutronen pro Spaltung $\bar{\nu}$

Die durchschnittliche Anzahl an freigesetzten Neutronen pro Spaltung hängt von der Energie der einfallenden Neutronen auf die Probe ab. Isotopenspezifische Daten hierfür wurden ebenfalls der Datenbank ENDF/B-VII.1 entnommen [7]. Die diskreten Werte für $\bar{\nu}$ wurden wie zuvor in ein Kontinuum überführt. Abbildung 4 zeigt $\bar{\nu}$ in Abhängigkeit von der Neutronenenergie.

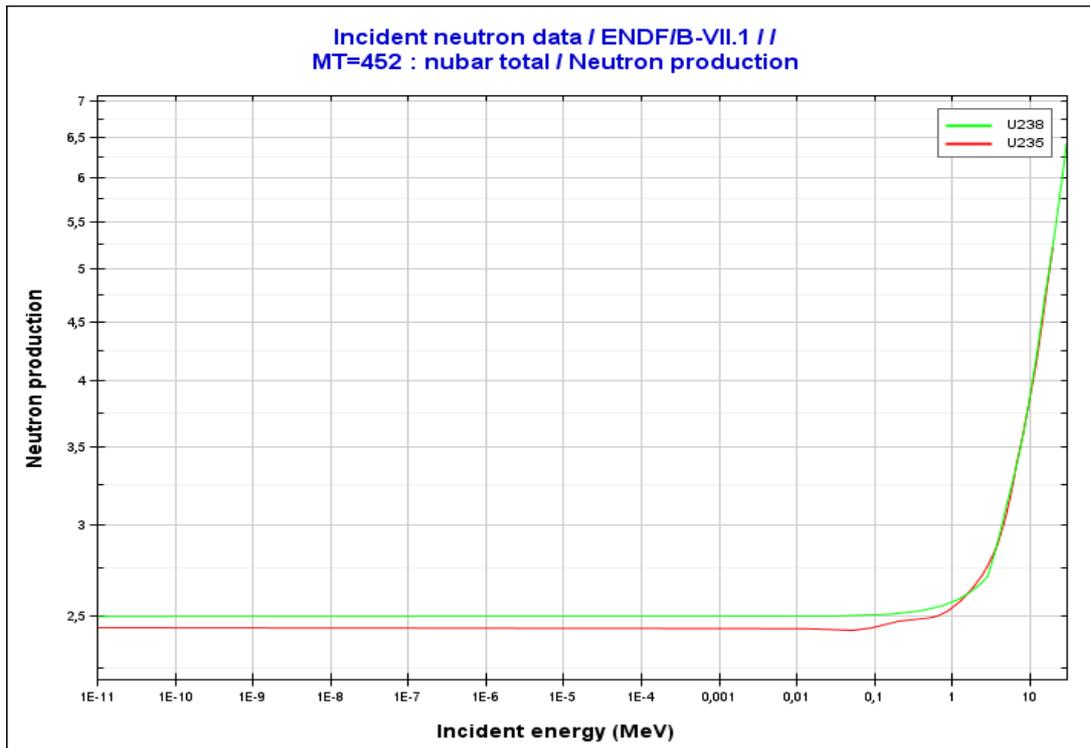


Abb. 4: $\bar{\nu}$ in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV). Die x-Achse ist logarithmisch dargestellt [7].

Verwendbare Informationen zu Unsicherheiten dieser Daten konnten der Datenbank jedoch nicht entnommen werden, sodass Standardabweichungen hier vernachlässigt wurden.

5. Messung und Analyse der Zählraten

5.1 Zählraten

Mit den oben ausgeführten Annahmen wurde als nächstes die Messung der Zählraten simuliert und zwar jeweils für thermische und für schnelle Neutronen, sodass die Ergebnisse der Messung direkt miteinander verglichen werden können. Dabei erfolgt die Simulation zunächst isotopenspezifisch. Im Anschluss entsteht aus diesen Zählraten durch Addition die jeweilige Gesamtzählrate, d.h. für schnelle und für thermische Neutronen, ZR_{th} und ZR_f .

Die Zählraten entsprechen dabei einer Poisson-Verteilung. Die Standardabweichung ergibt sich dann aus der Wurzel aus der Zählrate. Es gilt: $\Delta ZR = \sqrt{ZR}$.

5.2 Rückrechnung auf Masse und Anreicherungsgrad

Nachdem die Zählraten beschrieben wurden, soll nun geklärt werden, wie aus dem Unterschied der gemessenen Zählraten auf die Masse m und den Anreicherungsgrad a der Uranprobe geschlossen werden kann. Ein zentrales Ziel bei der Analyse der Zählraten ist es, zu überprüfen, wie exakt dies funktioniert. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$ZR_{th} = ZR_{th,235} = \epsilon \Phi_{th} N_{AX,235} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}$$

$$ZR_f = ZR_{f,235} + ZR_{f,238} = \epsilon \Phi_f (N_{AX,235} \bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} + N_{AX,238} \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}).$$

Bei Spaltungen durch thermische Neutronen ist der Beitrag an Spaltneutronen durch U-238 vernachlässigbar klein (was bereits durch den Begriff Spaltschwelle suggeriert wurde). Dies vereinfacht die obere Gleichung sehr zugunsten nachfolgender Berechnungen.

Durch Umformen der oberen Gleichung erhält man:

$$N_{AX,235} = \frac{ZR_{th}}{\epsilon \Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}.$$

Im nächsten Schritt wird aus den beiden Zählraten der Quotient $qZR = \frac{ZR_{th}}{ZR_f}$ gebildet.

Darüber erhält man durch Umformen:

$$\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} = \left(\frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f qZR} - \bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} \right) \frac{1}{\bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}}.$$

Es können also aus den Zählraten die Zahl N_{AX} für U-235 und das Verhältnis $\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}$ berechnet werden. Im weiteren Verlauf kann über $N_{AX,235}$ und $N_{AX,238}$ die Masse m ausgerechnet werden, sowie die Anteile des jeweiligen Isotops m_{235} und m_{238} . Dies funktioniert durch Umformen folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 1) \quad N_{AX,235} &= \frac{m a_{235}}{235 u} \\ 2) \quad N_{AX,238} &= \frac{m (1-a_{235})}{238 u}. \end{aligned}$$

Eine Umformung von Gleichung 1) nach m liefert:

$$m = \frac{235 \text{ u } N_{AX,235}}{a_{235}}.$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in Gleichung 2) und umgeformt nach a_{235} liefert:

$$a_{235} = \frac{1}{\frac{238 N_{AX,238}}{235 N_{AX,235}} + 1}.$$

Da für die Gesamtmasse der Probe $m = m_{235} + m_{238}$ gilt, folgt daraus für die Masse von Uran-235 in der Probe: $m_{235} = a_{235} m$. Alle ausgeführten Rechnungen, zugehörige Standardabweichungen und Ableitungen sind ausführlich im Anhang nachzulesen.

6. Ergebnisse

In Abhängigkeit vom Anreicherungsgrad a der Probe können nun die Zählraten ZR_{th} und ZR_f ermittelt werden, wobei das Spektrum des Anreicherungsgrads von 0,7%, also Natururan [13], bis 99% reicht. Dazwischen werden die Zählraten von 5% bis 95% in 5%-Schritten gemessen sowie von 97%. Die Probenmasse m wird dabei konstant auf 1kg gehalten, um die Ergebnisse damit zu normieren.

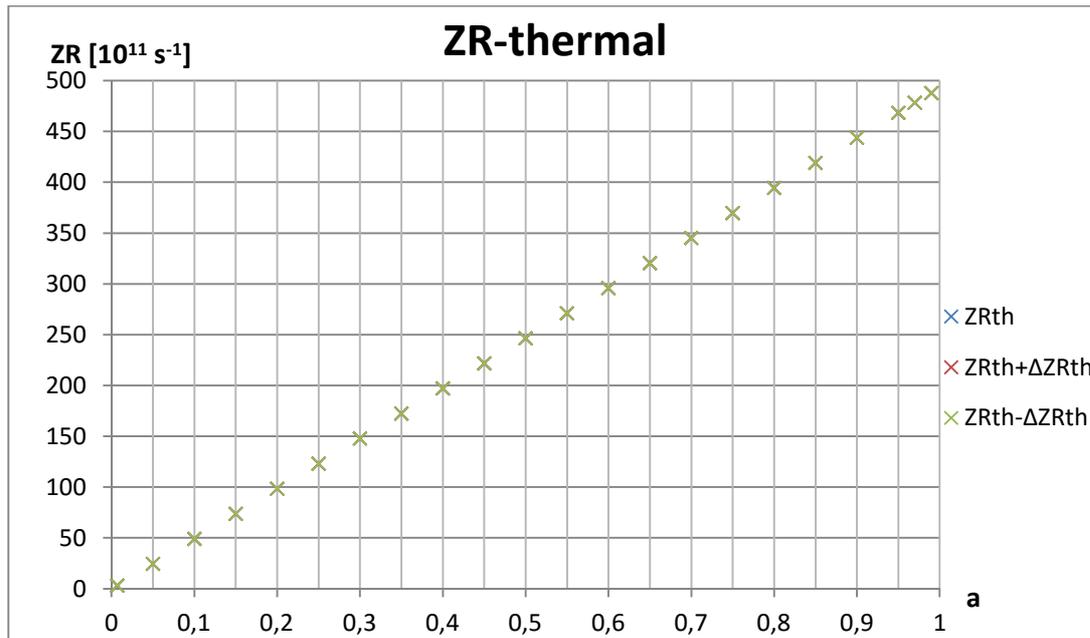


Abb. 5: Thermische Zählrate (in 10^{11} s^{-1}) in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads mit Standardabweichung.

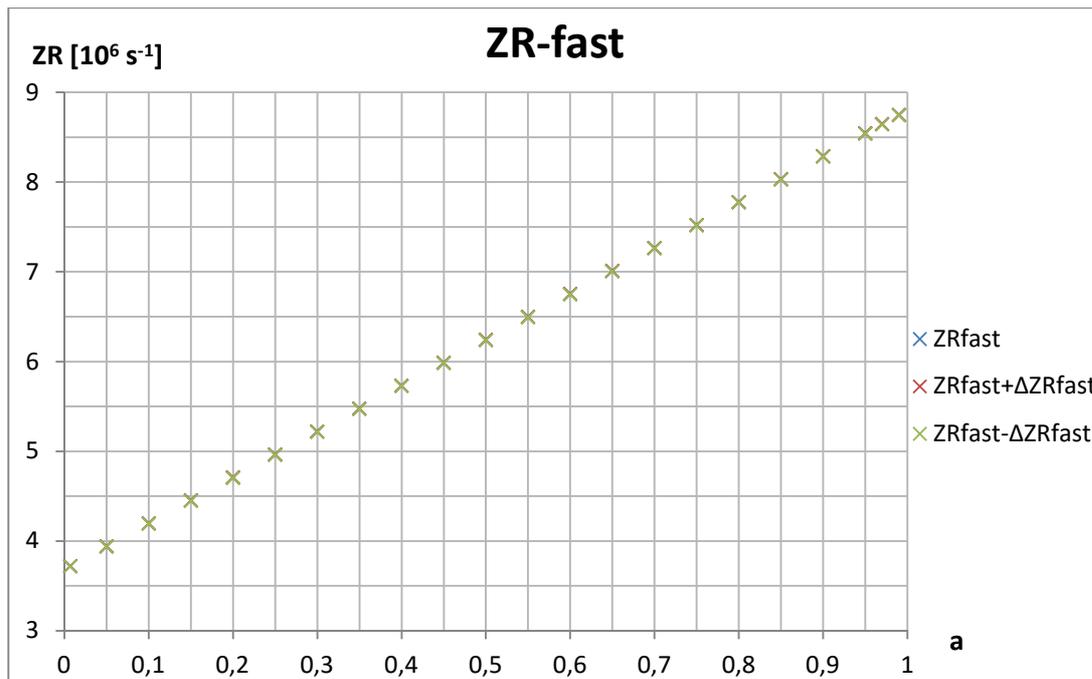


Abb. 6: Schnelle Zählrate (in 10^6 s^{-1}) in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads mit Standardabweichung.

In den Abbildungen 5 und 6 erkennt man, dass die Zählraten mit zunehmendem Anreicherungsgrad wachsen. Die Zählraten sind dabei so groß, dass die Standardabweichungen gar nicht in der Größenordnung der Zählraten liegen ($< 0,1\%$) und daher in den Diagrammen nicht sichtbar sind. Zu beachten ist des Weiteren, dass sich ZR_{th} und ZR_f in ihrer Größe stark unterscheiden, wenn man die Potenzen der Zählraten auf den y-Achsen betrachtet. Dies liegt an der Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte, da die Wirkungsquerschnitte mit zunehmender Energie der Quellneutronen abnehmen, wie schon in Abbildung 3 zu sehen ist. Und weil eine Veränderung des Wirkungsquerschnitts eine Veränderung in der Reaktionsrate bewirkt, hat dies unweigerlich auch eine Veränderung der Zählrate zur Folge. ZR_{th} liegt zwischen $(3,45 \times 10^{11} \pm 6 \times 10^5) \frac{1}{\text{s}}$ für 0,7% Anreicherung und $(4,88 \times 10^{13} \pm 7 \times 10^6) \frac{1}{\text{s}}$ für 99% angereichertes Uran und damit deutlich höher als die Zählrate ZR_f . Letztere beträgt für Natururan $(3,72 \times 10^6 \pm 2 \times 10^3) \frac{1}{\text{s}}$ und $(8,75 \times 10^6 \pm 3 \times 10^3) \frac{1}{\text{s}}$ für einen Anreicherungsgrad von 99%.

Entsprechend den Rechnungen aus dem vorherigen Kapitel kann in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads – und nach demselben Muster wie für die Zählraten – der Anreicherungsgrad a aus den Messungen der Zählraten analytisch berechnet werden.

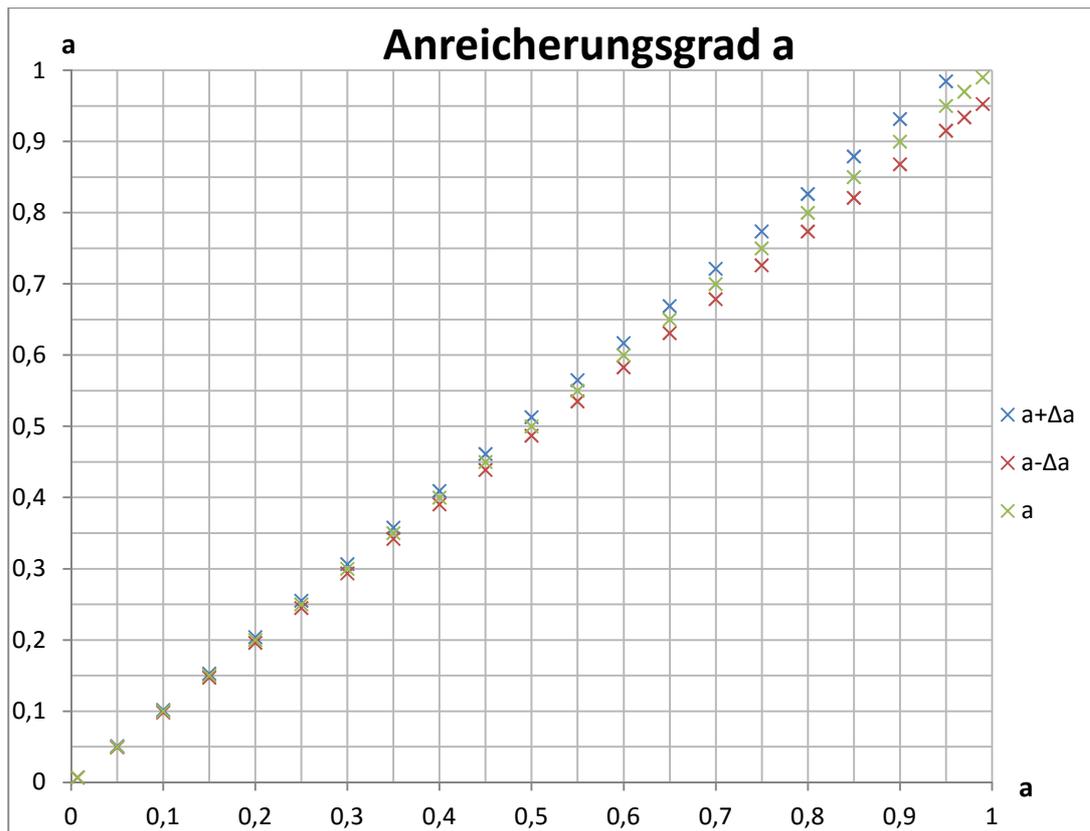


Abb. 7: Analytisch berechneter Anreicherungsgrad der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads, welcher für die Simulation der Zählraten bekannt war. Blaue und rote Kreuze zeigen die zugehörigen Standardabweichungen.

Abbildung 7 veranschaulicht, dass die berechneten Werte für den Anreicherungsgrad genau mit den tatsächlichen Werten übereinstimmen. Von Interesse ist daher die Betrachtung der Standardabweichung. Diese wird mit zunehmendem Anreicherungsgrad der Uranprobe größer, sodass sie bei niedrig angereichertem Uran ($a < 20\%$) kaum noch eine Rolle spielt. Beispielsweise beträgt der Fehler für einen Anreicherungsgrad von $a = 10\%$ nur knapp 0,2%. Bei hochangereichertem Uran ab 20% reicht das Spektrum der Standardabweichung von knapp 0,4% (bei 20% Anreicherung), über 2,9% bei 80% Anreicherung (eine für Kernwaffen [14] eher wahrscheinliche Größe als die 20%), bis hin zu 3,7% bei einer theoretisch möglichen Anreicherung von 99%.

Neben dem Anreicherungsgrad gilt auch die Masse der Uranprobe als zentrale Größe, die zu untersuchen ist. Daher kann im Folgenden die Masse m - entsprechend den Rechnungen aus dem vorherigen Kapitel - aus den Messungen der Zählrate und aus dem bekannten Anreicherungsgrad ermittelt werden und man kann untersuchen, wie exakt dies unter Berücksichtigung der Fehlergrößen funktioniert.

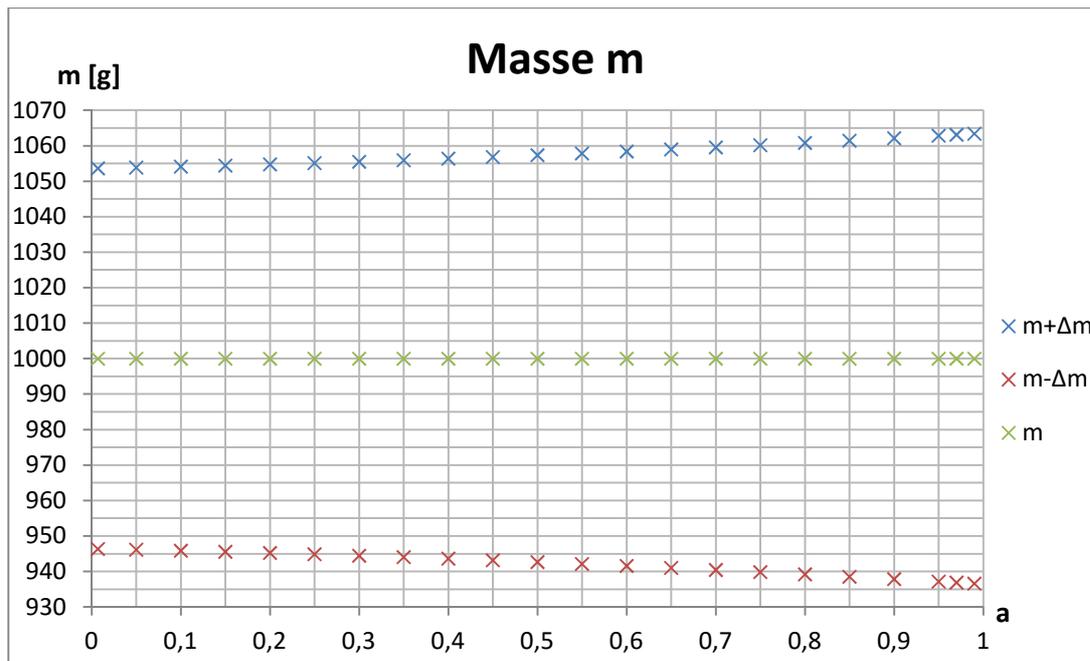


Abb. 8: Berechnete Masse (in Gramm) der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrades.
Blaue und rote Kreuze zeigen die Standardabweichungen an.

Da die Masse m in der Simulation konstant auf 1kg gehalten wurde, ist es keine neue Erkenntnis zu sehen, dass die Rückrechnung auf 1kg funktioniert. Wichtig ist hier wiederum, die Standardabweichungen zu betrachten. Wie bei der Anreicherung zeigt sich auch hier, dass die Standardabweichung mit Zunahme von a wächst, wobei der Anstieg nur leicht, und zwar gleichmäßig von 5,4% Abweichung bei Natururan bis zu 6,3% Abweichung bei 99% Anreicherung, erfolgt.

Abschließend wird noch der Vollständigkeit halber m_{235} , die Masse von Uran-235 in der Uranprobe, in Abhängigkeit vom Anreicherungsgrad berechnet und in Abbildung 9 dargestellt.

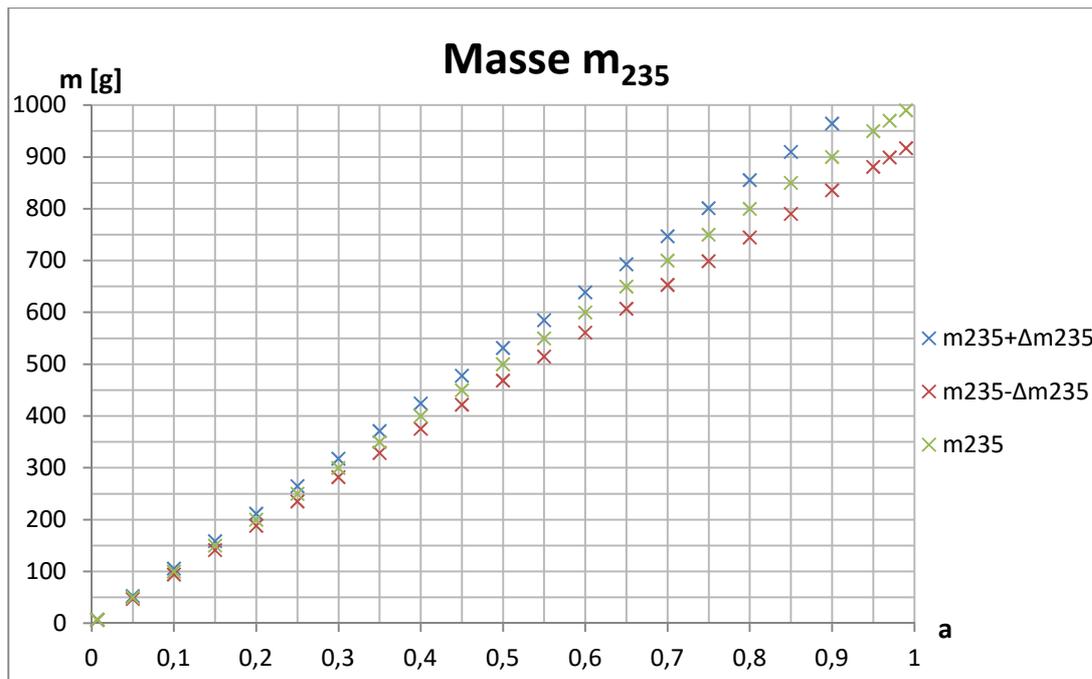


Abb. 9: Berechnete Masse (in Gramm) von U-235 in der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrades inklusive Standardabweichungen, die mit blauen und roten Kreuzen gekennzeichnet sind.

Da es sich jedoch bei der Masse m_{235} lediglich um das Produkt aus dem Anreicherungsgrad a und der Gesamtmasse m der Probe handelt, ist kein signifikant abweichendes Verhalten der Standardabweichung im Vergleich zur Untersuchung von a und m zu erwarten. Und so zeigt sich auch hier eine mit dem Anreicherungsgrad ansteigende Standardabweichung für m_{235} .

7. Diskussion und Ausblick

Im Rahmen der Anforderungen an diese Arbeit konnte die Messung der beiden Zählraten ZR_{th} und ZR_f erfolgreich simuliert werden, sodass diese zur Analyse der Uranprobe herangezogen werden konnten. Zu beachten ist hierbei, dass ihre Fehler nur daraus abgeleitet wurden, dass sie einer Poisson-Verteilung folgen, da die Zählraten in dieser Simulation ausschließlich analytisch berechnet wurden. Es hat hier keine Berücksichtigung weiterer Fehlergrößen, wie z. B. von Gerätefehlern gegeben.

Zu betonen ist, dass die Simulation unter bestimmten Prämissen durchgeführt wurde. Diese Annahmen verleihen der Untersuchung Modellcharakter und umreißen seinen Erkenntnishorizont. Da sowohl die Berechnung der Zählraten in der Simulation als auch die Rückrechnung von den Zählraten auf die Masse und die Anreicherung analytisch erfolgt sind, ist die Beurteilung der Fehlergrößen und der Standardabweichungen die einzige Möglichkeit, eine Aussage bezüglich der Genauigkeit der hier vorgestellten Messmethode zu treffen. Sowohl bei der Berechnung der Masse als auch des Anreicherungsgrads hat sich gezeigt, dass die Ungenauigkeiten mit zunehmender Anreicherung der Uranprobe steigen. Eine abschließende Erklärung dafür müsste in weiterführender Forschung untersucht werden.

Es stellt sich die Frage, wie gut oder schlecht die Ergebnisse der Masse und der Anreicherung sind. Nimmt man an, dass eine uranbasierte Atomwaffe schon mit wenigen kg Uran bei einer Anreicherung von beispielsweise 80% gebaut werden kann, so liegt die Fehlergenauigkeit mit ca. 6,1% noch in einem Rahmen, in dem die Menge ausreichend gut bestimmt werden kann. Bei einer Masse von 3kg entspräche dies einer Ungenauigkeit von ± 183 Gramm. Die Fehlergenauigkeit des Anreicherungsgrads betrüge in dem Bereich ca. $\pm 2,6\%$. Auch in diesem Fall würde man annehmen, dass eine Atomwaffe selbst mit 2,6% geringerer Anreicherung noch als solche erkannt werden könnte, sofern alle anderen Faktoren, die zur Beurteilung im Falle der Echtheitsüberprüfung eines nuklearen Sprengkopfs herangezogen werden würden, dem nicht widersprechen. Das bedeutet für die Beurteilung der Ergebnisse der beiden hier untersuchten Größen Masse und Anreicherungsgrad, dass sie insofern genau sind, als dass die Fehlergrößen nicht in derselben Größenordnung

liegen wie die untersuchten Größen selbst, insbesondere nicht in der Größenordnung einer signifikanten Menge [14] bei der Berechnung der Masse. D. h., dass man eine Probe der Masse 1kg von einer anderen Probe der doppelten Masse unterscheiden könnte, beziehungsweise eine mit niedriger Anreicherung von einer anderen mit hoher Anreicherung (z. B. 5% von 70%). Problematisch wird es, wenn zwei Proben im direkten Vergleich unterschieden werden sollen, deren Masseunterschied weniger als die zweifache Standardabweichung beträgt, z. B. 1kg und 1,1kg (selbst bei Natururan beträgt die Standardabweichung noch knapp 54g). Dasselbe gilt für die Unterscheidung zweier Proben, deren Anreicherungsgrade nahe beieinander liegen, sodass deren Unterschied kleiner als die zweifache Standardabweichung ist, z. B. eine mit 80% und mit 85% Anreicherung. Sollte diese Messtechnik aber beispielsweise im Rahmen einer Attributmessung hinter einer Informationsbarriere verwendet werden, käme es darauf an, die Fehler der Messung bei der Festlegung von Schwellenwerten für die Attribute zu berücksichtigen, um die Wahrscheinlichkeit einer Fehlbeurteilung so gering wie möglich zu halten.

Eine Reihe von Vereinfachungen, die in dieser Arbeit zur Berechnung von Zählraten und Fehlergrößen gemacht wurden, tragen dazu bei, dass die Unsicherheiten so gering ausfallen. Beispielsweise wurde in dieser Arbeit angenommen, dass die Uranprobe frei liegt, sodass es kein Hindernis zwischen Spaltneutronen und Detektor gibt. Abschirmende Effekte, wie etwa durch das Material und das Design eines Sprengkopfs, welcher das Spaltmaterial umgibt, wurden genau so wenig berücksichtigt wie die Überlegung, dass sich ein solcher Sprengkopf vermutlich in einem Aufbewahrungscontainer befände, der zusätzliche Abschirmungseffekte mit sich brächte. Auch geometrische Überlegungen bezüglich des Designs eines Sprengkopfes und die Frage, wie unterschiedliche geometrische Formen eine Messung beeinflussen würden, wurden vernachlässigt.

Für die Simulation der Zählraten wurde des Weiteren angenommen, dass es neben der neutroneninduzierten Spaltung keine weiteren kernphysikalischen Prozesse gibt, deren Wirkungsquerschnitte berücksichtigt werden müssten und welche die Zählraten beeinflussen könnten. Dabei gibt es weitere Reaktionen, bei denen die Quellneutronen absorbiert werden, z. B. (n,γ) Reaktionen, neutrale $(n,2n)$ Reaktionen oder geladene, wie etwa (n,p) oder (n,α) Reaktionen [10]. Mögliche Reaktionen von Spaltneutronen noch innerhalb der Uranprobe, welche zur Folge haben könnten, dass

nicht alle Spaltneutronen am Detektor ankommen, bleiben unberücksichtigt. Es wäre zumindest denkbar, dass bei Spaltungen durch thermische Neutronen schnelle Spaltneutronen emittiert werden, die in der Folge in U-238 Spaltungen induzieren, sodass auch schon bei Betrachtung der thermischen Zählrate ein Beitrag durch U-238 enthalten ist. Dieser Aspekt wird jedoch dadurch ausgeschlossen, dass die Uranprobe als punktförmig angenommen wurde, um die Berechnung der Zählraten zu vereinfachen. U-234 als weiteres, in sehr geringen Mengen natürlich auftretendes Isotop [13] wird außer Acht gelassen. Außerdem wird vernachlässigt, dass die Neutronen aus der Quelle eine Energieverteilung haben, sodass sie einfach als monoenergetisch betrachtet werden.

Ein nächster Schritt könnte sein, die Berechnungen auf Basis eines Realexperiments erneut durchzuführen. Man könnte Messungen am FRM-II in München an Uranproben durchführen und überprüfen, wie stark die gemessenen Werte von den simulierten abweichen, wenn die Bedingungen nicht so idealisiert sind wie in dieser Simulation angenommen. Eine entsprechende Neutronenquelle für schnelle Neutronen wie ein in dieser Arbeit simulierter DD-Generator müsste ebenfalls zur Verfügung stehen.

Literaturverzeichnis

- [1] Russian Federation and United States of America, *Treaty between the United States and the Russian Federation on Measures for the Further Reduction and Limitation of Strategic Offensive Arms* (2010).
- [2] Randy Rydell, „The Future of Nuclear Arms: A World United and Divided by Zero,“ *Arms Control Today*, Vol. 39, No. 3, April 2009.
- [3] Siehe Vertragstext des NVV in deutscher Übersetzung, unter: <http://www.auswaertiges-amt.de/cae/servlet/contentblob/349442/publicationFile/> (aufgerufen am 23.11.2015).
- [4] Malte Götttsche, Gerald Kirchner, „Measurement Techniques for Warhead Authentication with Attributes: Advantages and Limitations,“ *Science & Global Security* 22, no.2 (2014):83-110.
- [5] Nuclear Threat Initiative, *Innovating Verification: New Tools & New Actors to Reduce Nuclear Risks, Verifying Baseline Declarations of Nuclear Warheads and Materials* (2014).
- [6] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, and F. Zetsche. *Teilchen und Kerne. Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [7] M.B. Chadwick, M. Herman, P. Oblozinsky, M.E. Dunn, Y. Danon, A.C. Kahler, D.L. Smith, B. Pritychenko, G. Arbanas, R. Arcilla, R. Brewer, D.A. Brown, R. Capote, A.D. Carlson, Y.S. Cho, H. Derrien, K. Guber, G.M. Hale, S. Hoblit, S. Holloway, T.D. Johnson, T. Kawano, B.C. Kiedrowski, H. Kim, S. Kunieda, N.M. Larson, L. Leal, J.P. Lestone, R.C. Little, E.A. McCutchan, R.E. MacFarlane, M. MacInnes, C.M. Mattoon, R.D. McKnight, S.F. Mughabghab, G.P.A. Nobre, G. Palmiotti, A. Palumbo, M.T. Pigni, V.G. Pronyaev, R.O. Sayer, A.A. Sonzogni, N.C. Summers, I.J. Thompson P. Talou, A. Trkov, R.L. Vogt, S.C. van der Marck, A. Wallner, and M.C. White, “ENDF/B-VII.1 nuclear data for science and technology: Cross sections, covariances, fission product yields and decay data,” *Nuclear Data Sheets* 112, 2887–2996 (2011)
- [8] Gábor L. Monár. *Handbook of Prompt Gamm Activation Analysis with Neutron Beams*. 2004.

- [9] TU München, *Advanced Lab Course in Physics at FRM II, PGAA Prompt Gamma Activation Analysis* (2010).
- [10] Malte Göttsche, *Reducing Neutron Multiplicity Counting Bias for Plutonium Warhead Authentication*, Dissertation, Universität Hamburg (2015).
- [11] Malte Göttsche, Gerald Kirchner, *Einfluss von „Pit“-Containern auf Neutronenanalyse zur Kernwaffen-Authentifizierung*, Vortrag auf der DPG-Frühjahrstagung, Dresden (07.03.2013).
- [12] Frederik Postelt, Fabio Zeiser, Gerald Kirchner, *Analytical estimate of high energy gamma-ray emissions from neutron induced reactions in U-235 and Pu-239*, Report, University of Hamburg.
- [13] INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, *IAEA Safety Glossary, Terminology Used in Nuclear Safety and Radiation Protection (2007 Edition)*, unter: http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/Pub1290_web.pdf (aufgerufen am 25.11.2015).
- [14] INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, *IAEA Safeguards Glossary (2001 edition), International Nuclear Verification Series No. 3*, IAEA, Vienna (2002), unter: http://www-pub.iaea.org/MTCD/Publications/PDF/NVS3_scr.pdf (aufgerufen am 24.11.2015).

Abbildungsverzeichnis

1. Wirkungsquerschnitt (in barn) von U-238 für (n,f) Reaktionen in Abhängigkeit der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV) [7]. Seite 12
2. Schematische Darstellung der Anordnung eines He-3-Detektors um die punktförmige Quelle. Durch diese 4π -Geometrie der Anordnung soll sichergestellt werden, dass keine Spaltneutronen den Detektor verfehlen können [11]. Seite 14
3. Wirkungsquerschnitt (in barn) von U-235 und U-238 für (n,f) Reaktionen in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV). Schattierte Bereiche zeigen die Unsicherheiten. Beide Achsen sind logarithmisch dargestellt [7]. Seite 20
4. $\bar{\nu}$ in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Neutronen (in MeV). Die x-Achse ist logarithmisch dargestellt [7]. Seite 21
5. Thermische Zählrate (in 10^{11} s^{-1}) in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads mit Standardabweichung. Seite 24
6. Schnelle Zählrate (in 10^6 s^{-1}) in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads mit Standardabweichung. Seite 25
7. Analytisch berechneter Anreicherungsgrad der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrads, welcher für die Simulation der Zählraten bekannt war. Blaue und rote Kreuze zeigen die zugehörigen Standardabweichungen. Seite 26
8. Berechnete Masse (in Gramm) der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrades. Blaue und rote Kreuze zeigen die Standardabweichungen an. Seite 27
9. Berechnete Masse (in Gramm) von U-235 in der Uranprobe in Abhängigkeit des Anreicherungsgrades inklusive Standardabweichungen, die mit blauen und roten Kreuzen gekennzeichnet sind. Seite 28

Tabellenverzeichnis

1. Neutronenflussdichte, Neutronenenergie und relativer Fehler des FRM-II-Forschungsreaktors und eines DD-Generators (DD ENG) [12]. Seite 18

Anhang

Es gilt folgender Zusammenhang für die Zählraten:

$$ZR_{th} = ZR_{th,235} = \epsilon \Phi_{th} N_{AX,235} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}$$

$$ZR_f = ZR_{f,235} + ZR_{f,238} = \epsilon \Phi_f (N_{AX,235} \bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} + N_{AX,238} \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}).$$

Durch Umformen der oberen Gleichung erhält man:

$$N_{AX,235} = \frac{ZR_{th}}{\epsilon \Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}},$$

mit der zugehörigen Standardabweichung nach Gauß'schem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta N_{AX,235} = N_{AX,235} \sqrt{\left(\frac{\Delta ZR_{th}}{ZR_{th}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \Phi_{th}}{\Phi_{th}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma_{th,235}}{\sigma_{th,235}}\right)^2}.$$

Als nächstes wird aus den beiden Zählraten der Quotient $qZR = \frac{ZR_{th}}{ZR_f}$ gebildet und seine Standardabweichung zu

$$\Delta qZR = qZR \sqrt{\left(\frac{\Delta ZR_{th}}{ZR_{th}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta ZR_f}{ZR_f}\right)^2}$$

bestimmt. Über qZR erhält man durch Umformen:

$$qZR = \frac{\Phi_{th} N_{AX,235} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{N_{AX,235} \Phi_f \left(\bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} + \frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238} \right)}$$

$$qZR \frac{\Phi_f}{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}} = \frac{1}{\bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} + \frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}}$$

$$\bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} + \frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238} = \frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f qZR}$$

$$\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} = \left(\frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f qZR} - \bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} \right) \frac{1}{\bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}}.$$

Die zugehörige Standardabweichung lautet:

$$\Delta\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\Phi_{th}} \Delta\Phi_{th}\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{th,235}} \Delta\sigma_{th,235}\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{f,235}} \Delta\sigma_{f,235}\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\Phi_f} \Delta\Phi_f\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial qZR} \Delta qZR\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{f,238}} \Delta\sigma_{f,238}\right)^2}$$

Die sechs Ableitungen hierfür lauten:

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\Phi_{th}} = \frac{\bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f qZR \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{th,235}} = \frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235}}{\Phi_f qZR \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{f,235}} = -\frac{\bar{v}_{f,235}}{\bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\Phi_f} = -\frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{qZR \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238} \Phi_f^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial qZR} = -\frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f \bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238} qZR^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}}\right)}{\partial\sigma_{f,238}} = \left(\bar{v}_{f,235} \sigma_{f,235} - \frac{\Phi_{th} \bar{v}_{th,235} \sigma_{th,235}}{\Phi_f qZR}\right) \frac{1}{\bar{v}_{f,238} \sigma_{f,238}^2}.$$

Als nächstes können über $N_{AX,235}$ und $N_{AX,238}$ die Masse m ausgerechnet werden sowie die Anteile des jeweiligen Isotops m_{235} und. Dies funktioniert durch Umformen folgenden Gleichungssystems:

$$1) \quad N_{AX,235} = \frac{m a_{235}}{235 u}$$

$$2) \quad N_{AX,238} = \frac{m (1-a_{235})}{238 u}.$$

Eine Umformung von Gleichung 1) nach m liefert:

$$m = \frac{235 u N_{AX,235}}{a_{235}}.$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in Gleichung 2) und umgeformt nach a_{235} liefert:

$$N_{AX,238} = \frac{\frac{235 u N_{AX,235}}{a_{235}} (1 - a_{235})}{238 u}$$

$$N_{AX,238} = \frac{235 N_{AX,235}}{238 a_{235}} - \frac{235 N_{AX,235}}{238}$$

$$N_{AX,238} + \frac{235 N_{AX,235}}{238} = \frac{235 N_{AX,235}}{238 a_{235}}$$

$$\frac{238 N_{AX,238}}{235} + N_{AX,235} = \frac{N_{AX,235}}{a_{235}}$$

$$\frac{238 N_{AX,238}}{235 N_{AX,235}} + 1 = \frac{1}{a_{235}}$$

$$a_{235} = \frac{1}{\frac{238 N_{AX,238}}{235 N_{AX,235}} + 1}$$

Da für die Gesamtmasse der Probe $m = m_{235} + m_{238}$ gilt, folgt daraus für die Masse von Uran-235 in der Probe: $m_{235} = a_{235} m$. Die zugehörigen Standardabweichungen für a , m und m_{235} lauten:

$$\Delta a_{235} = \frac{238 \Delta \left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} \right)}{235 \left(\frac{238 \left(\frac{N_{AX,238}}{N_{AX,235}} \right)}{235} + 1 \right)^2},$$

$$\Delta m = m \sqrt{\left(\frac{\Delta N_{AX,235}}{N_{AX,235}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta a_{235}}{a_{235}} \right)^2},$$

$$\Delta m_{235} = m_{235} \sqrt{\left(\frac{\Delta a_{235}}{a_{235}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2}.$$

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei den Mitgliedern aller Arbeitsgruppen des ZNF unter Leitung von Prof. Dr. Gerald Kirchner für die freundliche Aufnahme und angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken, insbesondere bei:

Prof. Dr. Gerald Kirchner für die Möglichkeit, am ZNF meine Bachelorarbeit anzufertigen. Er hielt für mich stets das große Ganze im Blick;

Frederik Postelt, der mich während meiner gesamten Arbeit betreute. Er half mir, wenn die Arbeit ins Stocken geriet. Speziell in der Phase der Simulation und der Berechnungen war er sehr hilfsbereit und geduldig mit mir.

Erik Buhmann, mit dem ich vor allem in der Schlussphase viel Spaß hatte, der mir ein guter Nachbar und Zuhörer war, wenn ich mit Problemen zu ihm kam.

Weiterhin möchte ich Johanna Thiess, Alex Radev, Ryan Stark, Calvin Brett, Michael Heber, Eileen Wolf und Kai Fröhlich erwähnen und mich bei ihnen für Korrekturlesungen bedanken und für das Hinweisen auf Unklarheiten in meiner Arbeit.

Zu guter Letzt danke ich Johanna Thiess, die mich ständig unterstützt und mir gerade in der letzten Phase meiner Arbeit dazu verholfen hat, noch einmal alles zu geben und mir Flügel verliehen hat.